Chapitre 9

Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

EPFL

9.1 Moment cinétique et moment de force

- 9.1.1 Moment cinétique
- 9.1.2 Moment de force
- 9.1.3 Théorème du moment cinétique
- 9.1.4 Mouvement circulaire uniforme

9.2 Loi de la gravitation universelle

- 9.2.1 1ère loi de Kepler
- 9.2.2 2e loi de Newton
- 9.2.4 Loi de la gravitation universelle
- 9.2.5 Constantes du mouvement
- 9.2.6 Orbites gravitationnelles

9.3 Gravitation classique et relativité générale

- 9.3.1 Prédictions de la relativité générale
- 9.3.2 Cosmologie

9.1 Moment cinétique et moment de force
9.1.1 Moment cinétique
9.1.2 Moment de force
9.1.3 Théorème du moment cinétique
9.1.4 Mouvement circulaire uniforme

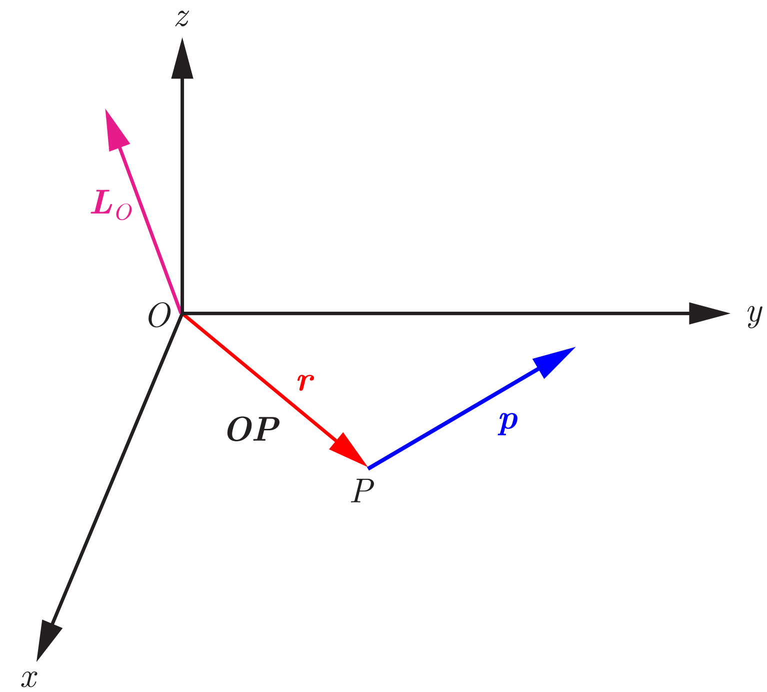
- **Moment cinétique :** grandeur vectorielle extensive et axiale $\boldsymbol{L}_O$, définie par rapport à un point O, associée au mouvement de rotation plan d'un point matériel P autour de O.

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{9.1}$$

Le moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{p}$ selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI) :** $\left[\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\right]$

Newton a introduit le concept de vitesse aréolaire, mais c'est Bernoulli qui a utilisé en premier une grandeur vectorielle extensive pour caractériser un mouvement de rotation.



Daniel Bernoulli
1700 – 1782

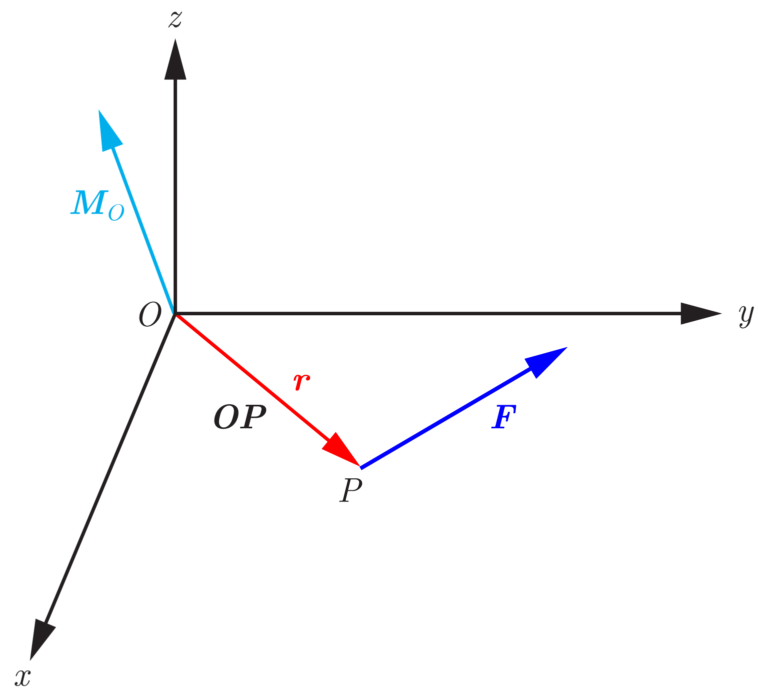
- **Moment de force :** grandeur vectorielle extensive et axiale $\boldsymbol{M}_O$, définie par rapport à un point O, associée à l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O.

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (9.2)$$

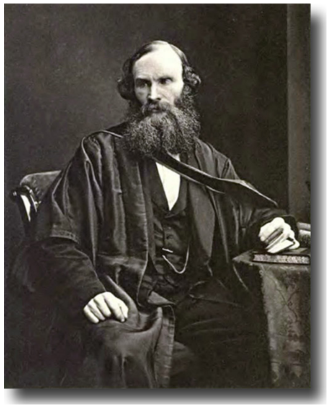
Le moment de force $\boldsymbol{M}_O$ est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{F}$ selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI) :** $[\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}]$

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.



James Thomson
1822 – 1892



- **Moment cinétique :**

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{9.1}$$

- **Dérivée temporelle :** moment cinétique

$$\dot{\boldsymbol{L}}_O = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \cancel{\boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} \tag{9.3}$$

- **2^{e} loi de Newton :**

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{p}} \tag{2.17}$$

- **Dérivée temporelle :** moment cinétique

$$\dot{\boldsymbol{L}}_O = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} \tag{9.4}$$

- **Moment de forces extérieures :** somme (9.2)

$$\sum \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \sum \boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} \tag{9.5}$$

- **Théorème du moment cinétique :** évalué à l'origine O

$$\boxed{\sum \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_O} \tag{9.6}$$

Le théorème du moment cinétique est l'analogue en rotation de la 2^e loi de Newton en translation.

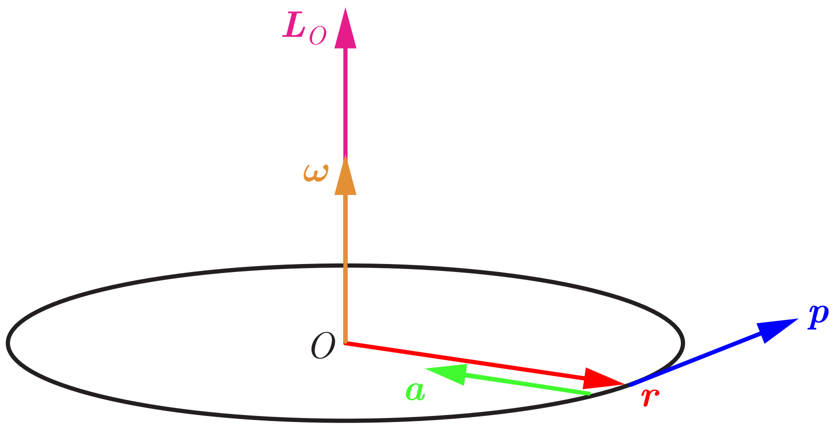
- **Accélération centripète :** MCU

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -\,\omega^2 \boldsymbol{r} \qquad (4.92)$$

- **Moment de forces extérieures :** (9.7)

$$\sum \boldsymbol{M}_O^{\,\text{ext}} = \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}}$$

$$\overset{(2.32)}{=\!=\!=} \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a} \overset{(4.92)}{=\!=\!=} -\,m\,\omega^2 \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$



- **Théorème du moment cinétique :** évalué en O

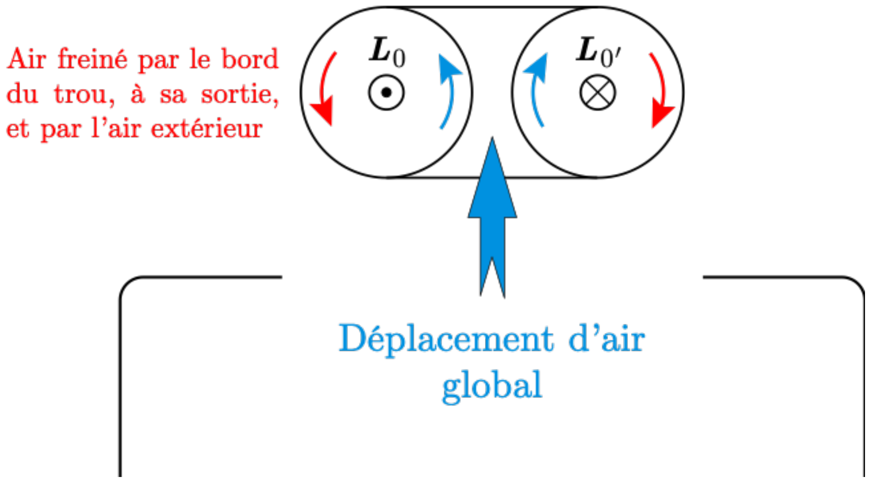
$$\sum \boldsymbol{M}_O^{\,\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_O = \boldsymbol{0} \qquad (9.8)$$

- **Moment cinétique :** évalué en O

$$\boldsymbol{L}_O = \textbf{cste} \qquad (9.9)$$

- **Mouvement circulaire uniforme :** axe orthogonal passant par O

$$\boldsymbol{L}_O = I_O\,\boldsymbol{\omega} \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{\omega} = \textbf{cste} \qquad \text{et} \qquad I_O = \text{cste} > 0 \qquad (9.10)$$

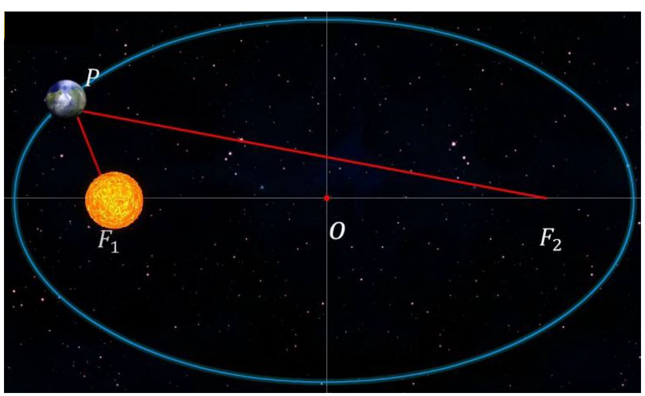


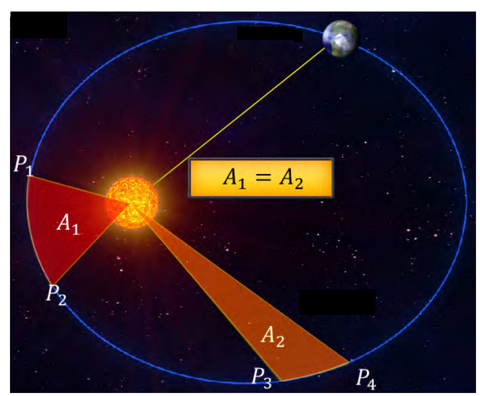
- En tirant et en relâchant la membrane arrière du cube, on peut créer un vortex de fumée par convection à la sortie du trou circulaire.
- La rotation de la fumée en deux régions opposées du vortex (tore) a lieu en sens opposé. Ainsi, les moments cinétiques $\boldsymbol{L}_O$ et $\boldsymbol{L}'_O$ sont égaux et opposés et se compensent de sorte que le moment cinétique total du vortex soit nul en tout temps.

9.2 Loi de la gravitation universelle
9.2.1 1$^{\text{ère}}$ loi de Kepler
9.2.2 2$^{\text{e}}$ loi de Newton
9.2.4 Loi de la gravitation universelle
9.2.5 Constantes du mouvement
9.2.6 Orbites gravitationnelles

- **Lois de Kepler :** mécanique céleste

  1. **Loi des orbites :** l'orbite des planètes est une ellipse dont le soleil est le foyer.
  2. **Loi des aires :** l'aire balayée par le vecteur position, centré sur le soleil, par unité de temps est constante.
  3. **Loi des périodes :** le rapport de la période orbitale au carré sur le demi-grand axe de l'ellipse au cube est constant.





Tycho Brahe
1546 – 1601

Johannes Kepler
1571 – 1630

- La force de gravitation, comme la tension du fil attaché au puck, est une force centrale dirigée en tout temps vers un point fixe, à savoir le soleil. D'après la 2^e loi de Kepler, les aires balayées durant des intervalles de temps égaux sont égales.
- Pour une orbite circulaire, la 2^e loi de Kepler implique que la vitesse angulaire est constante.

- **Mouvement plan de la terre :** coordonnées polaires
- **Vecteur position :**

$$\boldsymbol{r} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{5.5}$$

- **Vecteur vitesse :**

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{5.8}$$

- **Moment cinétique :** évalué en O

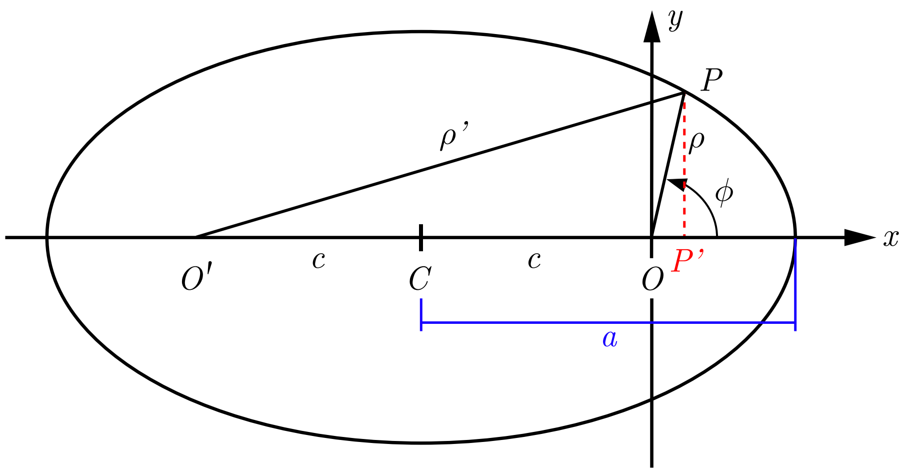
$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \left(\cancel{\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) = m\rho^2\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.11}$$

Le moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ est orthogonal au plan du mouvement.

- **Moment de force gravitationnelle :**

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_O = m\rho\left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\,\ddot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.12}$$

- **Mouvement de la terre :** ellipse de foyers O et O'. Le soleil est en O et la terre en P.



a = demi-grand axe

- **Ellipse :** lieu géométrique des points P dont la somme des distances aux foyers O et O' est fixe.

$$\|\boldsymbol{OP}\| + \|\boldsymbol{O'P}\| = \text{cste} \tag{9.13}$$

- **Ellipse :** coordonnées polaires

$$\rho + \rho' = \rho + \sqrt{(\rho \sin\phi)^2 + (2c + \rho\cos\phi)^2} = 2a = \text{cste} \tag{9.14}$$

- **Ellipse :** au carré

$$(\rho \sin\phi)^2 + (2c + \rho\cos\phi)^2 = (2a - \rho)^2 \tag{9.15}$$

- **Ellipse :** au carré développée

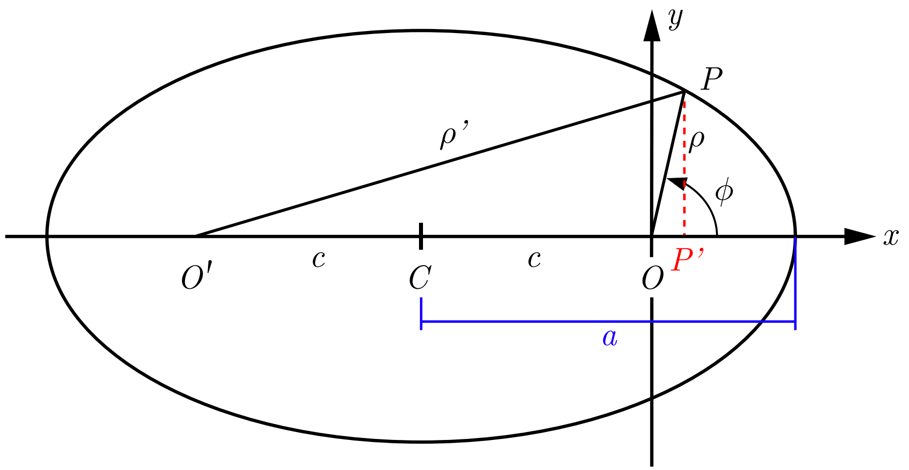
$$\cancel{\rho^2 \left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right)} + 4c^2 + 4c\rho\cos\phi = 4a^2 - 4a\rho + \cancel{\rho^2} \tag{9.16}$$

- **Ellipse :** coordonnées

$$\rho\left(a + c\cos\phi\right) = a^2 - c^2 \qquad (9.17)$$

- **Coordonnée radiale :**

$$\rho = \frac{a\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\right)}{1 + \dfrac{c}{a}\cos\phi} \qquad (9.18)$$



a = demi-grand axe

- **Excentricité :**

$$e \equiv \frac{c}{a} \qquad (9.19)$$

1. **Cercle :** $c = 0$ ainsi $e = 0$
2. **Ellipse :** $0 < c < a$ ainsi $0 < e < 1$

- **Coordonnée radiale :** fonction de la coordonnée angulaire

$$\rho\left(\phi\right) = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\phi} \qquad (9.20)$$

- **Force de la gravitation :** force attractive exercée sur la terre par le soleil à l'origine O.

$$\boldsymbol{F}_G = -\, F_G\,(\rho)\;\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{où} \qquad F_G\,(\rho) > 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = \rho\,(\phi) \tag{9.21}$$

- **Loi du mouvement :**

$$\boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{a} \tag{9.22}$$

- **Accélération :** coordonnées polaires

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{5.10}$$

- **Equations du mouvement :** (9.21) et (5.10) dans (9.22)

1. selon $\hat{\boldsymbol{\rho}}$: $\;-\, F_G\,(\rho) = m\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right)$
2. selon $\hat{\boldsymbol{\phi}}$: $\;0 = m\left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}\right)$ $\quad(9.23)$

- **Moment de force gravitationnelle :** (9.12) et (9.23)

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_O = m\rho\left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0} \qquad (9.24)$$

- **Moment cinétique :** évalué en O (9.11)

$$\boldsymbol{L}_O \equiv L\,\hat{\boldsymbol{z}} = m\rho^2\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{z}} = \mathbf{cste} \qquad \text{ainsi} \qquad L = m\rho^2\dot{\phi} = \text{cste} \qquad (9.25)$$

Le moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ du mouvement gravitationnel est constant parce qu'il n'y a pas de moment de forces extérieures par rapport à l'origine O. Ceci est dû au fait que la force gravitationnelle $\boldsymbol{F}_G = -\,F_G\,(\rho)\;\hat{\boldsymbol{\rho}}$ est colinéaire au vecteur position $\boldsymbol{r} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$.

- **Vitesse angulaire scalaire :** fonction de la coordonnée radiale (9.25)

$$\dot{\phi}\,(\rho) = \frac{L}{m\rho^2} \qquad (9.26)$$

- **Coordonnée radiale :**

$$\rho\left(\phi\right) = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\phi} \qquad (9.20)$$

- **Vitesse angulaire scalaire :**

$$\dot{\phi}\left(\rho\right) = \frac{L}{m\rho^2} \qquad (9.26)$$

- **Vitesse radiale :** dérivée temporelle de (9.20) avec (9.26)

$$\dot{\rho}\left(\phi\right) = e\,\dot{\phi}\,\sin\phi\,\frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 + e\cos\phi\right)^2} \underset{(9.26)}{\overset{(9.20)}{=\!=}} \frac{e\,L}{ma\left(1 - e^2\right)}\,\sin\phi \qquad (9.27)$$

- **Accélération radiale :** dérivée temporelle de (9.27) avec (9.26)

$$\ddot{\rho}\left(\phi\right) = \frac{e\,L}{ma\left(1 - e^2\right)}\,\dot{\phi}\cos\phi \overset{(9.26)}{=\!=} \frac{e\,L^2}{m^2a\left(1 - e^2\right)\rho^2}\cos\phi \qquad (9.28)$$

- **Force gravitationnelle :**

$$F_G\left(\rho\right) = m\left(\rho\,\dot{\phi}^2 - \ddot{\rho}\right) \tag{9.23}$$

- **Coordonnée radiale et vitesse angulaire scalaire :**

$$\rho\left(\phi\right) = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\phi} \qquad (9.20) \qquad\qquad \dot{\phi}\left(\rho\right) = \frac{L}{m\rho^2} \tag{9.26}$$

- **Accélération radiale :**

$$\ddot{\rho}\left(\phi\right) = \frac{e\,L^2}{m^2 a\left(1 - e^2\right)\rho^2}\,\cos\phi \tag{9.28}$$

- **Force gravitationnelle :** (9.20), (9.26) et (9.28) dans (9.23)

$$F_G\left(\rho\right) = \frac{L^2}{ma\left(1 - e^2\right)\rho^2}\left(\frac{a\left(1 - e^2\right)}{\rho} - e\cos\phi\right)$$

$$\underset{\overline{\overline{}}}{(9.20)}\ \frac{L^2}{ma\left(1 - e^2\right)\rho^2} \tag{9.29}$$

- **Force gravitationnelle :**

$$F_G(\rho) = \frac{L^2}{ma\,(1 - e^2)\,\rho^2} \tag{9.29}$$

- **Constante :** système terre - soleil

$$K \equiv \frac{L^2}{ma\,(1 - e^2)} = \text{cste} > 0 \tag{9.30}$$

- **Force gravitationnelle :** (9.30) dans (9.21)

$$F_G(\rho) = \frac{K}{\rho^2} \tag{9.31}$$

- **Force gravitationnelle vectorielle :** (9.31) dans (9.21)

$$\boldsymbol{F}_G(\rho) = -\,\frac{K}{\rho^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{9.32}$$

La force gravitationnelle $\boldsymbol{F}_G(\rho)$ est inversement proportionnelle au carré de la distance ρ qui sépare la terre du soleil.

- **Intervalle de temps infinitésimal :**

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{m\rho^2} \qquad \text{ainsi} \qquad dt = \frac{m\rho^2}{L}\,d\phi \tag{9.33}$$

- **Coordonnée radiale :** au carré

$$\rho^2 = \frac{a^2\left(1 - e^2\right)^2}{\left(1 + e\cos\phi\right)^2} \tag{9.34}$$

- **Période orbitale :** (9.34) dans (9.33) où $\phi \in [0, 2\pi)$ et $\rho = \rho\left(\phi\right)$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{m\rho^2}{L}\,d\phi = \frac{ma^2\left(1 - e^2\right)^2}{L}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\left(1 + e\cos\phi\right)^2} \tag{9.35}$$

- **Intégrale :**

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\left(1 + e\cos\phi\right)^2} = \frac{2\pi}{\left(1 - e^2\right)^{3/2}} \tag{9.36}$$

Cette intégrale peut être évaluée avec le calcul symbolique de Mathematica ou en utilisant le changement de variable universel $u = \tan\left(\phi/2\right)$

- **Période orbitale :** (9.36) dans (9.35)

$$T = \frac{2\pi\, ma^2 \left(1 - e^2\right)^{1/2}}{L} \tag{9.37}$$

- **3e loi de Kepler :**

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste} \tag{9.38}$$

- **Constante :** système terre - soleil

$$K = \frac{L^2}{ma\left(1 - e^2\right)} = \text{cste} \tag{9.30}$$

- **3e loi de Kepler :** (9.37) et (9.30) dans (9.38)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 a \left(1 - e^2\right)}{L^2} = \frac{4\pi^2 m}{K} = \text{cste} \tag{9.39}$$

- **Constante :** proportionnelle à la masse de la terre m.

$$K \propto m \tag{9.40}$$

- **Constante :** proportionnelle à la masse de la terre

$$K \propto m \tag{9.40}$$

1. **3$^{\text{e}}$ loi de Newton :** la force gravitationnelle exercée par le soleil sur la terre $\boldsymbol{F}_G$ est égale et opposée à la force exercée par la terre sur le soleil $-\boldsymbol{F}_G$.
2. **2$^{\text{e}}$ loi de Newton :** la force gravitationnelle $-\boldsymbol{F}_G$ exercée par la terre sur le soleil est proportionnelle à la masse M du soleil.
3. **Constante :** la force gravitationnelle $-\boldsymbol{F}_G$ est proportionnelle à la constante K (9.19). Ainsi, la constante K est proportionnelle à la masse du soleil M.

- **Constante :** proportionnelle à la masse du soleil

$$K \propto M \tag{9.41}$$

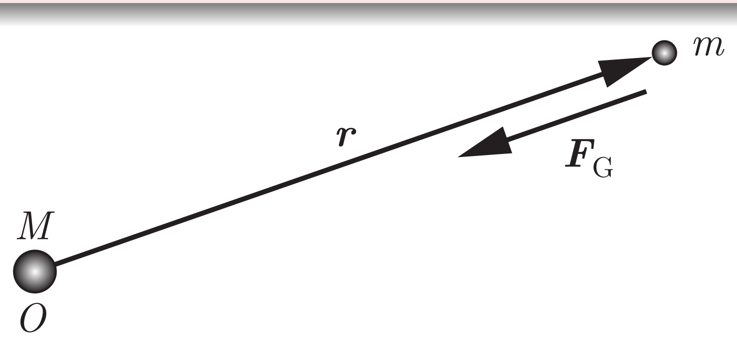
- **Constante de la gravitation universelle :** G

$$K = G\,M\,m \tag{9.42}$$

- **Loi de la gravitation universelle :**

Deux points matériels massifs sont soumis à des forces d'attraction gravitationnelle égales et opposées $\boldsymbol{F}_G$ et $-\boldsymbol{F}_G$, proportionnelles au produit des masses M et m et inversement proportionnelles au carré de la distance r qui les sépare.

Sir Isaac Newton
$1643 - 1727$

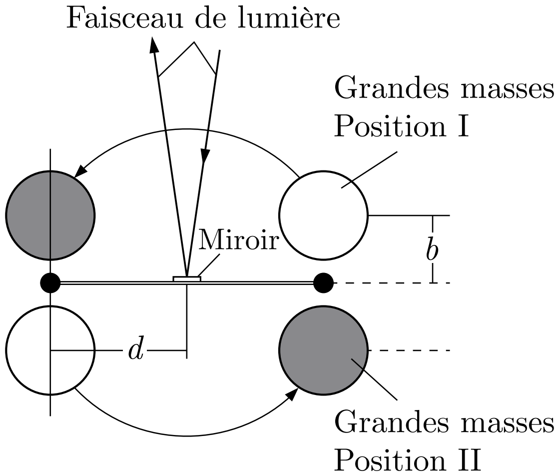


Modèle mathématique : (9.42) dans (9.32)

$$\boldsymbol{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \text{où} \qquad \hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{9.44}$$

- **Constante de la gravitation universelle :**

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2} \tag{9.43}$$



- La constante de la gravitation universelle G est mesurée à l'aide d'un pendule de torsion constitué de deux petites masses attachées à une tige oscillant dans un plan horizontal dû à l'attraction de la force gravitationnelle générée par deux grosses masses.

- A l'équilibre, le moment de force dû aux forces d'attraction gravitationnelles entre les petites et les grosses masses est compensé par le moment de force de torsion du fil vertical qui soutient la tige. On peut en déduire la constante de la gravitation universelle G.

9.2.5 Constantes du mouvement

- **Equation du mouvement gravitationnel :** astre quelconque

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right) = -\,F_G\left(\rho\right) = -\,\frac{K}{\rho^2} \qquad \text{où} \qquad \dot{\phi} = \frac{L}{m\rho^2} \tag{9.23}$$

- **Equation du mouvement gravitationnel :** remise en forme

$$m\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{K}{\rho^2} = 0 \tag{9.45}$$

- **Equation du mouvement gravitationnel :** multipliée par $\dot{\rho}$

$$m\dot{\rho}\,\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m}\,\frac{\dot{\rho}}{\rho^3} + K\,\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} = 0 \tag{9.46}$$

- **Equation :** (9.46) multipliée par dt où $d\dot{\rho} = \ddot{\rho}\,dt$ et $d\rho = \dot{\rho}\,dt$

$$m\dot{\rho}\,d\dot{\rho} - \frac{L^2}{m}\,\frac{d\rho}{\rho^3} + K\,\frac{d\rho}{\rho^2} = 0 \tag{9.47}$$

- **Intégrale :** (9.47) de $\rho' \in [\rho_0, \rho]$ et $\dot{\rho}' \in [\dot{\rho}_0, \dot{\rho}]$

$$m\int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}} \dot{\rho}'\,d\dot{\rho}' - \frac{L^2}{m}\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^{\,3}} + K\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^{\,2}} = 0 \tag{9.48}$$

- **Intégrale :** (9.48) différence de termes évalués au temps $t' = 0$ et $t' = t$

$$\frac{1}{2}\,m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}\,m\dot{\rho}_0^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{L^2}{2m\rho_0^2} - \frac{K}{\rho} + \frac{K}{\rho_0} = 0 \qquad (9.49)$$

- **Energie mécanique :** constante du mouvement

$$E = \frac{1}{2}\,m\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{K}{\rho} = \text{cste} \qquad (9.50)$$

L'énergie mécanique E est constante car la force gravitationnelle est une force conservative.

- **Vitesse angulaire scalaire :**

$$\dot{\phi} = \frac{L}{m\rho^2} \qquad (9.26)$$

- **Energie mécanique :** (9.26) dans (9.50)

$$E = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{K}{\rho} = \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}^2 - \frac{K}{\rho} \qquad (9.51)$$

- **Energie mécanique :**

$$E = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{K}{\rho} = \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}^2 - \frac{K}{\rho} \qquad (9.51)$$

- **Energie mécanique :** (7.9) où $V = V_G$

$$E = T + V_G \qquad (9.52)$$

- **Energie potentielle gravitationnelle :** (9.30) et (7.6)

$$\boxed{V_G = -\frac{K}{\rho} = -\frac{GMm}{\rho} < 0} \qquad (9.53)$$

- **Force de la gravitation :** norme

$$F_G = \frac{K}{\rho^2} = \frac{GMm}{\rho^2} \qquad (9.31)$$

1. $F_G \propto \rho^{-2}$
2. $V_G \propto \rho^{-1}$

- **Moment cinétique :** (9.11) évalué en O

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \left(\cancel{\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}} + \rho\,\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}\right) = m\rho^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} \qquad (9.54)$$

- **Vecteur accélération :** (9.32)

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}_G}{m} = -\,\frac{K}{m\rho^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad (9.55)$$

- **Produit vectoriel :** (9.54) et (9.55)

$$\boldsymbol{L}_O \times \boldsymbol{a} = -\,K\left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}\right) \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\,K\,\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} \qquad (9.56)$$

- **Constantes :** $\boldsymbol{L}_O$ et K

$$\dot{\boldsymbol{L}}_O = \boldsymbol{0} \quad (9.25) \qquad \text{et} \qquad \dot{K} = 0 \quad (9.30)$$

- **Dérivée temporelle nulle :** (9.25), (9.30) et (9.56)

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{L}_O \times \boldsymbol{v} + K\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) = \boldsymbol{L}_O \times \boldsymbol{a} + K\,\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \boldsymbol{0} \qquad (9.57)$$

- **Dérivée temporelle nulle :** (9.57)

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{L}_O \times \boldsymbol{v} + K\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) = \boldsymbol{L}_O \times \boldsymbol{a} + K\,\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \boldsymbol{0}$$

- **Vecteur de Laplace-Runge-Lenz :**

constante du mouvement

$$\boldsymbol{L}_O \times \boldsymbol{v} + K\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \textbf{cste} \qquad (9.58)$$

- **Vecteur d'excentricité :**

constante du mouvement

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{K}\,\boldsymbol{L}_O \times \boldsymbol{v} + \hat{\boldsymbol{\rho}} = \textbf{cste} \qquad (9.59)$$

Le vecteur d'excentricité est orienté selon le demi-grand axe de l'ellipse et sa norme est l'excentricité de l'ellipse : $\|\boldsymbol{e}\| = e$

Pierre-Simon de Laplace
1700 – 1782

Carl Runge
1856 – 1927

- **Référentiel relatif :** pour étudier les trajectoires (orbites) des astres attirés par le soleil en fonction de leur énergie mécanique E, on se place dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ fixé au centre du soleil qui tourne avec l'astre, tel que le référentiel $\mathcal{R}'$ est toujours radialement orienté vers l'astre. Cela signifie que par rapport au référentiel relatif $\mathcal{R}'$, la vitesse relative $\boldsymbol{v}'$ de l'astre est purement radiale.

- **Energie cinétique relative :** par rapport au référentiel relatif $\mathcal{R}'$, la vitesse relative de l'astre est la vitesse radiale $\boldsymbol{v}' = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Ainsi, l'énergie cinétique relative dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$T' = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}'^{\,2} = \frac{1}{2}\,m\dot{\rho}^2 \tag{9.60}$$

- **Energie mécanique :**

$$E = \frac{1}{2}\,m\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{K}{\rho} \tag{9.50}$$

- **Energie mécanique :** référentiel relatif

$$E = T' + V_G' = \frac{1}{2}\,m\dot{\rho}^2 + V_G' \tag{9.61}$$

- **Energie mécanique :**

$$E = \frac{1}{2}\, m\dot{\rho}^2 + V_G' \qquad (9.61)$$

- **Energie potentielle relative :**

$$\boxed{V_G' = \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{K}{\rho}} \qquad (9.62)$$

- **Minimum :** V_G'

$$\left.\frac{dV_G'}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = -\frac{L^2}{m\rho_0^3} + \frac{K}{\rho_0^2} = 0$$

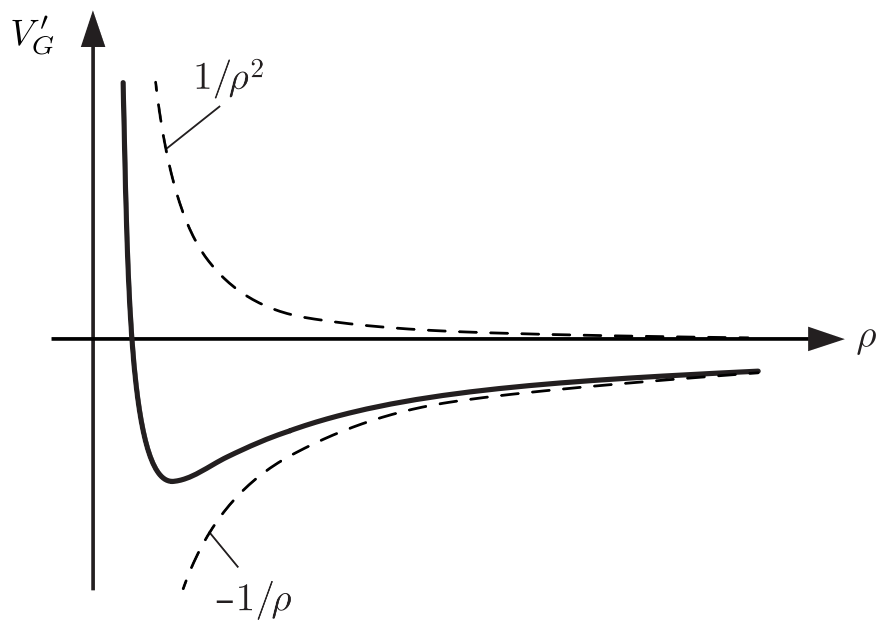
$$\rho_0 = \frac{L^2}{mK} \qquad (9.63)$$

- **Minimum :** $V_G' < 0$

$$V_G'(\rho_0) = -\frac{1}{2}\, m\,\frac{K^2}{L^2} < 0 \qquad (9.64)$$

- **Limites :** (9.65)

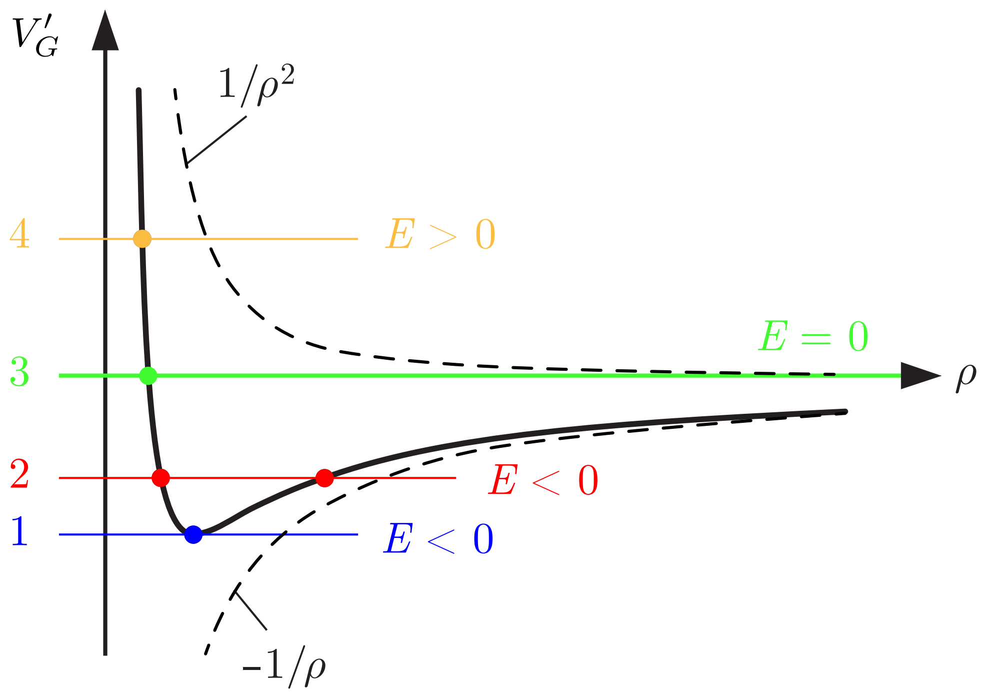
1. $$\lim_{\rho\to 0} V_G' = \lim_{\rho\to 0} \frac{L^2}{2m\rho^2} = +\infty$$
2. $$\lim_{\rho\to\infty} V_G' = \lim_{\rho\to\infty} -\frac{K}{\rho} = -0$$

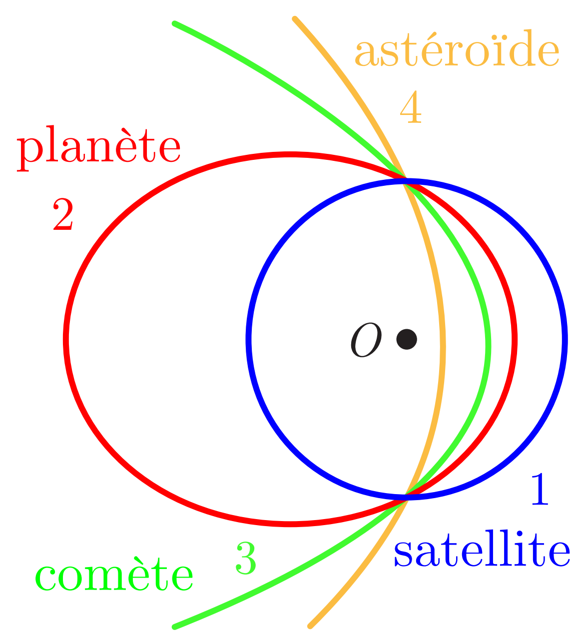


- **Orbites :** points d'intersection V_G' et $E = \text{cste}$: extremum de ρ (9.65)

$$E = V_G' \quad \text{ainsi} \quad T' = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\rho} = 0 \quad \text{alors} \quad \rho_{\text{min}} \quad \text{ou} \quad \rho_{\text{max}}$$

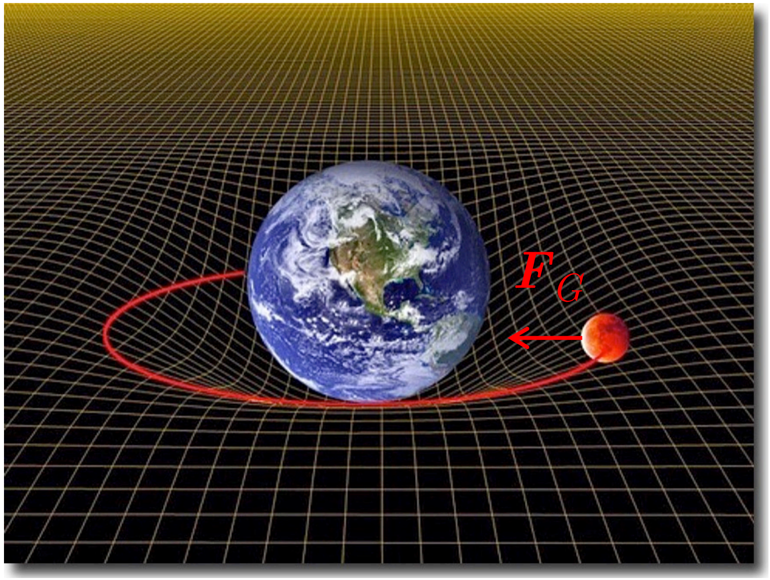
1. Circulaire $(e = 0)$: $E < 0$ et $\rho_{\text{min}} = \rho = \rho_{\text{max}}$
2. Elliptique $(0 < e < 1)$: $E < 0$ et $\rho_{\text{min}} \leqslant \rho \leqslant \rho_{\text{max}}$
3. Parabolique $(e = 1)$: $E = 0$ et $\rho_{\text{min}} \leqslant \rho$
4. Hyperbolique $(e > 1)$: $E > 0$ et $\rho_{\text{min}} \leqslant \rho$





9.3 Gravitation classique et relativité générale
9.3.1 Prédictions de la relativité générale
9.3.2 Cosmologie

Rotation de la lune autour de la terre



1. **Loi de la gravitation universelle :** la force de la gravitation F_G exercée par la terre sur la lune est la cause de l'**orbite elliptique**.

2. **Théorie de la relativité générale :** la courbure de la structure de l'espace-temps (membrane quadrillée) est la cause de l'**orbite elliptique**.

1. **Loi de la gravitation universelle :** l'**orbite elliptique** de la lune n'est pas sa trajectoire naturelle (droite) dans un espace-temps plat : la cause du mouvement est la force de la gravitation F_G.

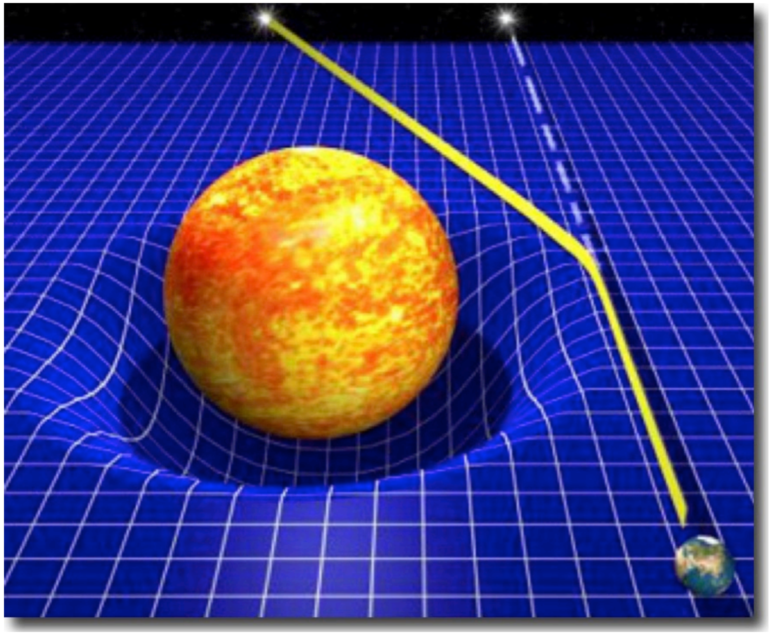
2. **Théorie de la relativité générale :** l'**orbite elliptique** de la lune est son mouvement naturel dans un espace-temps courbé par la terre : la notion de force est remplacée par celle de courbure de l'espace-temps.

1. **Lentille gravitationnelle**

- **Déviation des rayons lumineux :** la présence du soleil déforme la structure de l'espace-temps. Les rayons lumineux sont déviés par cette déformation. Leurs positions réelles sont différentes de leurs positions apparentes.

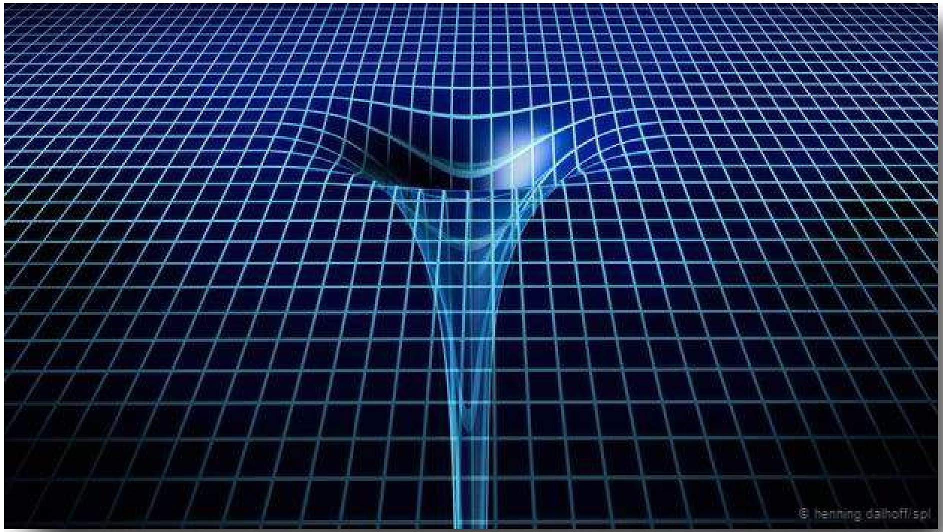
- **Lentille gravitationnelle :** le soleil se comporte comme une lentille convergente qui dévie les faisceaux de lumière stellaire et galactiques vers la terre.

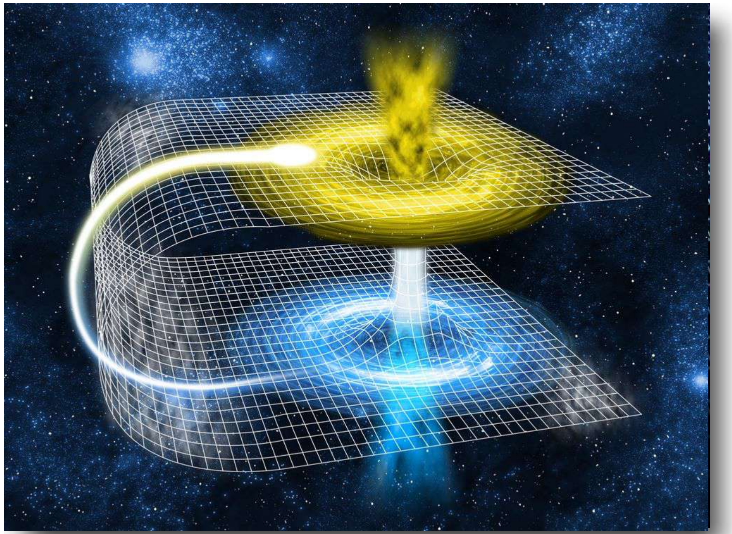
Position réelle **Position apparente**



- **Histoire :** la vérification expérimentale de la déviation la lumière par le soleil prédite par la relativité générale a été faite durant une éclipse de soleil au Chili en 1919 par Eddington : Einstein est devenu célèbre du jour au lendemain.

Trous noirs

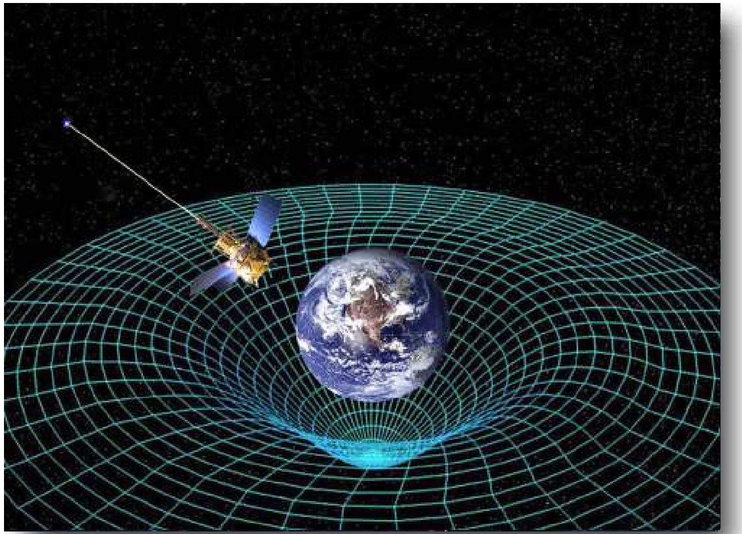




- **Critère de Schwarzschild :** si une masse M se trouve dans un rayon R inférieur au rayon de Schwarzschild $R_s = 2\,GM/c^2$ alors la structure de l'espace-temps se rompt et fait apparaître une singularité, appelée trou noir, puisque rien ni même la lumière ne peut s'en échapper.

- **Trou de vers :** en liant un trou noir à un trou blanc (son opposé), on obtient un trou de vers qui est un raccourci qui permet théoriquement de voyager dans le temps.

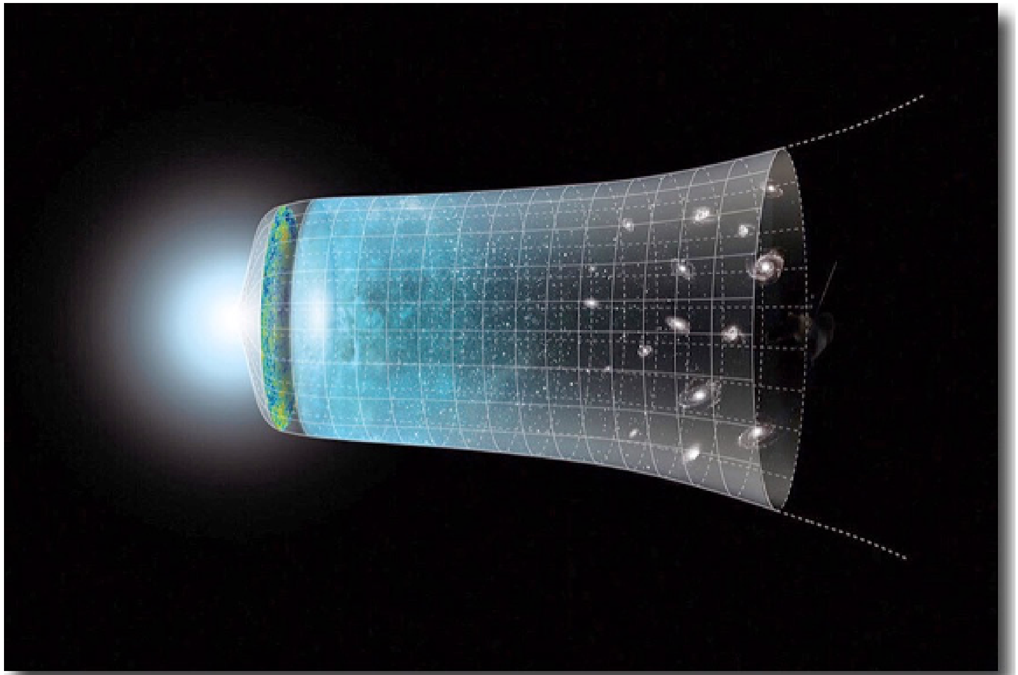
3. **Dilatation du temps**



- **Courbure de l'espace-temps :** le temps ne s'écoule pas de la même manière sur l'orbite géostationnaire que sur la terre. Il s'écoule plus lentement à la surface de la terre.

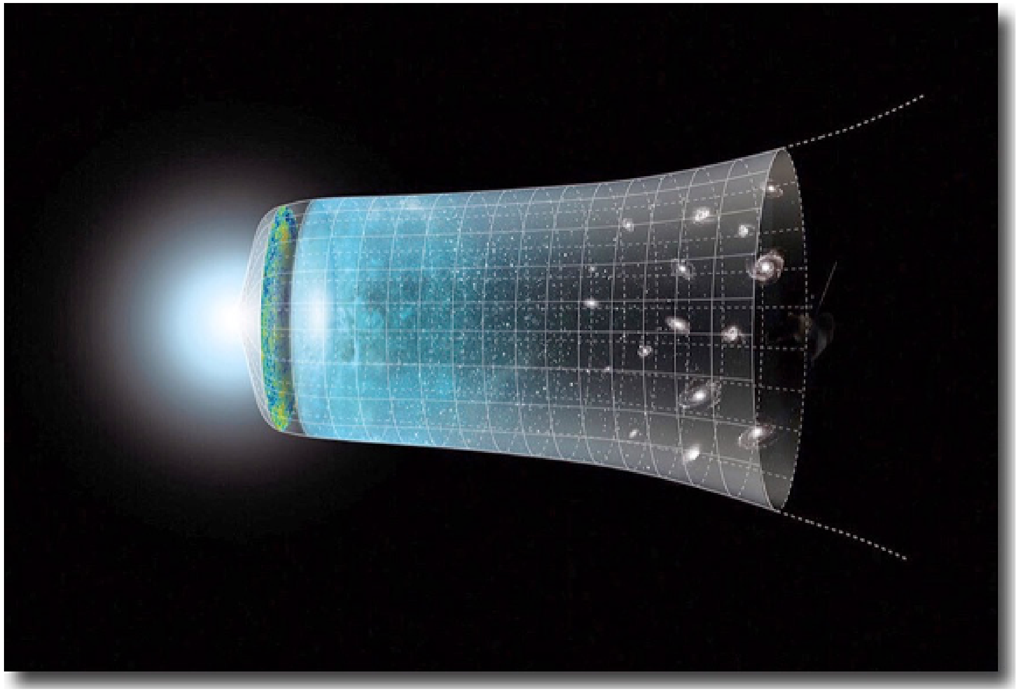
  1. **GPS :** l'erreur due à la dilatation du temps est d'environ 10 m.
  2. **Ecoulement du temps :** la différence d'écoulement du temps entre le bord de la mer et le sommet de l'Everest est de 1.5 ms/année.

- **Cosmologie :** évolution et histoire de l'univers dans son ensemble obtenue en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers.



1. $t < 10^{-43}$ s : **Big Bang** (singularité initiale)
2. $t \sim 10^{-43} - 10^{-36}$ s : **Univers quantique** (fluctuations)
3. $t \sim 10^{-36} - 10^{-32}$ s : **Inflation cosmique** (facteur 10^{80})
4. $t \sim 380'000$ années : **Rayonnement cosmologique**

- **Cosmologie :** évolution et histoire de l'univers dans son ensemble obtenue en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers.



4. $t \sim 380'000$ années : **Rayonnement cosmologique**
5. $t \sim 400$ millions d'années : **Première étoile**
6. $t \sim 7$ millards d'années : **Expansion accélérée**
7. $t \sim 13.7$ millards d'années : **Création de l'EPFL**